L'enseignement et l'apprentissage de la géométrie plane, étudiés du point de vue de la construction mathématique et de l'emploi du langage et de la logique

Questionnement :

Pourquoi les élèves ont-ils des difficultés à appliquer les théorèmes de la géométrie plane au début du secondaire et comment remédier à ces difficultés ?

Une question simple… mais seulement d’apparence !

Nécessité d’une exploration élargie du monde de la géométrie, voire des mathématiques toutes entières.

Les mathématiques… Une pensée qui se construit.

Les mathématiques partent du réel sensible… Mais pour le reconstituer dans la suite en termes de structures abstraites.

Quels sont les « phénomènes » - au sens donné par Freudenthal à ce terme dans sa phénoménologie didactique » - sur lesquels s’appuient les connaissances géométriques ?

Quelle est la structure logique du savoir géométrique ?

Comment ce savoir est-il élaboré et dans quel cadre cette élaboration s’inscrit-elle ?

Les quatre niveaux de la construction mathématique

Niveau 1 :

Les mathématiques naturelles intuitives

Le travail mathématique et le raisonnement se font en parenté avec des situations de la réalité sensible et sur des objets intuitifs et connus.

Niveau 2 :

Les mathématiques naturelles formalisées

Nouveaux thèmes et nouvelles notions :

Variables, Expressions littérales, Équations et Inéquations, Irrationnels, Fonctions, Limites, Repères cartésiens, Vecteurs …

Passage :

Objets concrets → Objets idéels

+

– Langage propre formel

– Signes logiques

– Théorèmes généraux

– Démonstrations

Niveau 3 : L’ « Idéalisation »

(Nous empruntons ce terme « Idéalisation », comme celui de « Thématisation » dans la suite, au philosophe Jean Cavaillès)

Axiomatisation, développement théorique complexe et non intuitif et adjonction de nouveaux éléments ‘imaginaires’, le tout ‘appliqué’ aux modèles déjà existants : voilà quelques mots qui caractériseraient ce troisième niveau de la construction mathématique.

– Organisation (d’un point de vue déductif) du savoir

– Disparition du caractère intuitif des objets mathématiques

L’esprit humain commence à interroger le possible des objets-éléments (non pas encore des théories et des structures).

Niveau 4 : La « Thématisation »

Les mathématiques abstraites : l’algèbre abstraite… mais aussi la topologie, la théorie de la mesure, la géométrie différentielle…

Interrogation du possible des relations entre objets.

Des objets et des relations sans aucune détermination apriorique et qui sont définis par la structure elle-même.

L'introduction des théorèmes de géométrie au début du secondaire :

Passage : Niveau 1 → niveau 2.

Début de la véritable élaboration du modèle mathématique de la géométrie euclidienne :

Théorèmes généraux sur Objets idéels

Un point de vue intéressant sur la nature des concepts géométriques :

Les concepts figuraux selon Efraim Fischbein

Pour Efraim Fischbein, les entités mentales dont traite la géométrie possèdent intrinsèquement et simultanément des caractères conceptuels et figuratifs.

L’activité géométrique porte sur ces constructions mentales – sur ces concepts figuraux.

Dans cette activité, l'image et les contraintes formelles ne peuvent être séparées.

Corroboration de Houdement et Kuzniak :

le travail géométrique au secondaire se fait à deux niveaux :

- Intuitif-perceptif d’une part
- Conceptuel-axiomatique d’autre part

- Deux paradigmes cohérents propices à du raisonnement.

- Difficulté pour l'étudiant de choisir le paradigme adapté.

Besoin de quitter souvent ‘GII’ pour se mettre dans ‘GI’ ; besoin particulièrement de se référer à des figures.

Une géométrie axiomatique au secondaire ?

Loin de là

Un coup d’œil sur le système axiomatique élaboré par Hilbert – Hilbert qui reprend le système d’Euclide tout en corrigeant quelques-unes de ses insuffisances – pour s’en convaincre.

Une géométrie avec des îlots axiomatiques…

Comment alors présenter les théorèmes de géométrie aux élèves au début du secondaire?

Le faire arbitrairement et demander aux élèves de les vérifier par expérimentation a posteriori? Mais…

En appui sur leur intuition de l’espace ? Mais…

Démontrer alors ces théorèmes ? Mais …

Nécessité regarder ces théorèmes un par un…

Certains sont ‘intuitifs’ alors que d’autres… beaucoup moins.

Que désignons-nous par ‘ Théorème intuitif’ ?

Théorème qui :

Correspond au « jugements d’une seule venue » et aux « expériences mentales », selon les critères établis par Denis Tanguay - en se référant à Nicolas Rouche –

Figure dans au moins l’un des systèmes axiomatiques équivalents qui fondent la géométrie euclidienne.

Exemples de ‘Théorèmes ‘intuitifs’:

« Deux angles correspondants déterminés par deux parallèles et une sécante ont la même amplitude. »

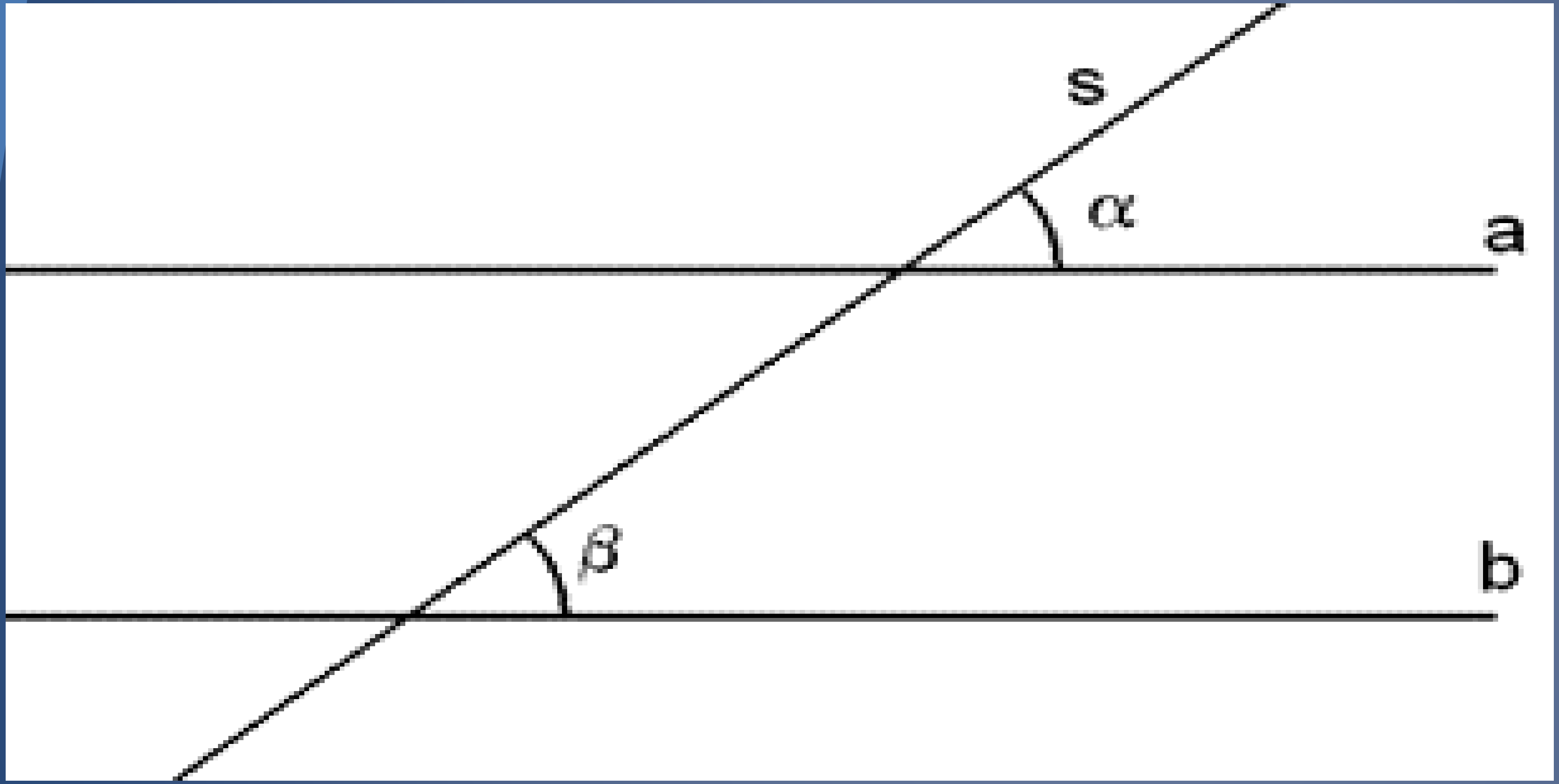
« Tout point de la médiatrice d’un segment est équidistant des deux extrémités du segment. »

Des théorèmes ‘peu intuitifs’ :

« La somme des angles d’un triangle quelconque est 180° (l’angle plat) » ;

« Si un angle ψ inscrit dans un cercle et un angle au centre θ interceptent le même arc, alors la mesure de l’angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit ($\theta=2\psi$). »

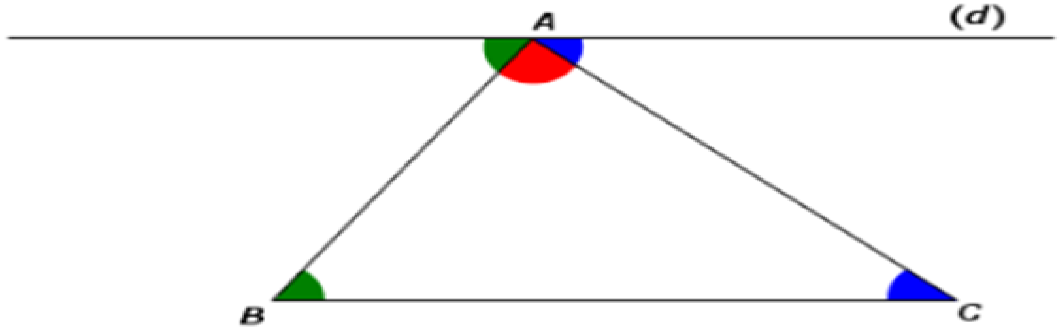
Figure illustrative relative au premier théorème:



Il est d’énoncé simple et l’un des premiers théorèmes de géométrie qu’on apprend aux enfants, pourtant il est peu intuitif.

1. Somme des angles dans un triangle

Soit *ABC* un triangle et (*d*) une droite passant par *A* et parallèle à (*BC*).



Les angles bleus d’une part ainsi que les angles verts d’autre part sont en position d’**angles alternes-internes.**
Or les droites (*d*) et (*BC*) sont **parallèles,** donc les angles bleus ont la **même mesure** et les angles verts aussi.
D’après le schéma, les angles vert, bleu et rouge forment un angle plat. Ils sont donc **supplémentaires.** La somme de ces trois angles est égale à 180°.

Conclusion :

- Théorèmes intuitifs : les approcher de l’intuition de l’espace des élèves.
- Théorèmes peu intuitifs : Démonstration.