Les difficultés de l'apprentissage de la trigonométrie

Marie PIERARD et Valérie HENRY

IRDENA

14 décembre 2020

Introduction

Introduction

- Début de la thèse en 2015
  - Objectif : concevoir une ingénierie didactique centrée sur l'instrumentalisation du cercle trigonométrique.
  - Concentration sur le cercle trigonométrique : charnière entre la facette géométrique et la facette analytique de la trigonométrie

Introduction

- Début de la thèse en 2015
  - Objectif : concevoir une ingénierie didactique centrée sur l'instrumentalisation du cercle trigonométrique.
  - Concentration sur le cercle trigonométrique : charnière entre la facette géométrique et la facette analytique de la trigonométrie

- Présentation des analyses préalables lors de la journée IRDENA de décembre 2018
  - Histoire, savoir savant et revue de la littérature
  - Programmes scolaires, manuels scolaires et questionnement d'enseignants

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Introduction

- Début de la thèse en 2015
  - Objectif : concevoir une ingénierie didactique centrée sur l'instrumentalisation du cercle trigonométrique.
  - Concentration sur le cercle trigonométrique : charnière entre la facette géométrique et la facette analytique de la trigonométrie

- Présentation des analyses préalables
  lors de la journée IRDENA de décembre 2018
  - Histoire, savoir savant et revue de la littérature
  - Programmes scolaires, manuels scolaires et questionnement d'enseignants

- Nouvel objectif suite aux analyses préalables :
  remise en question de la transposition didactique de la trigonométrie

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Cadre théorique

Cadre théorique

- Transposition didactique (CHEVALLARD) :
  1. Savoir savant
  2. Savoir à enseigner
  3. Savoir enseigné

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Cadre théorique

- Transposition didactique (CHEVALLARD) :
  1. Savoir savant
  2. Savoir à enseigner
  3. Savoir enseigné
- D'après nos analyses préalables :
  - L'organisation du savoir savant dépend du manuel consulté.
    - ★ À partir des triangles rectangles
    - ★ À partir du cercle trigonométrique
    - ★ À partir des fonctions trigonométriques

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Cadre théorique

- Transposition didactique (CHEVALLARD) :
  1. Savoir savant
  2. Savoir à enseigner
  3. Savoir enseigné
- D'après nos analyses préalables :
  - L'organisation du savoir savant dépend du manuel consulté.
    - À partir des triangles rectangles
    - À partir du cercle trigonométrique
    - À partir des fonctions trigonométriques
  - Le savoir à enseigner actuel ne suit pas l'histoire.
    - Historiquement, on travaille avant tout dans des cercles non trigonométriques (notamment pour l'astronomie).
    - Historiquement, on met l'accent sur la tangente dans les triangles rectangles (notamment grâce aux gnomons).

Cadre théorique

- Transposition didactique (CHEVALLARD) :
  1. Savoir savant
  2. Savoir à enseigner
  3. Savoir enseigné
- D'après nos analyses préalables :
  - L'organisation du savoir savant dépend du manuel consulté.
    - À partir des triangles rectangles
    - À partir du cercle trigonométrique
    - À partir des fonctions trigonométriques
  - Le savoir à enseigner actuel ne suit pas l'histoire.
    - Historiquement, on travaille avant tout dans des cercles non trigonométriques (notamment pour l'astronomie).
    - Historiquement, on met l'accent sur la tangente dans les triangles rectangles (notamment grâce aux gnomons).
  - Le savoir à enseigner évolue sans cesse depuis les années 1950.
    - Aujourd'hui : les difficultés arrivent généralement avec le cercle trigonométrique.

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Illustration : le parcours du cosinus

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Illustration : le parcours du cosinus

- Grade 9 : $\cos(\alpha) = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

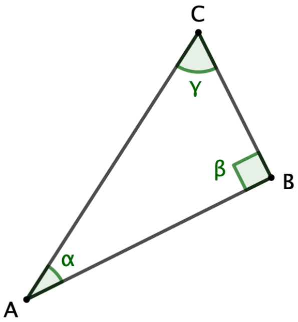


Illustration : le parcours du cosinus

- Grade 9 : $\cos(\alpha) = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- Grade 10 : $\cos(\beta)$ est l'abscisse du point B

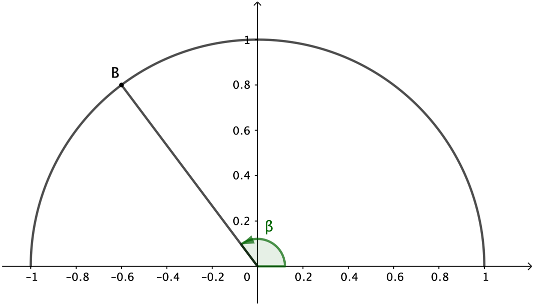


Illustration : le parcours du cosinus

- Grade 9 : $\cos(\alpha) = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- Grade 10 : $\cos(\beta)$ est l'abscisse du point B
- Grade 11 : $\cos(x)$ est une fonction, les cosinus sont les ordonnées des points du graphe

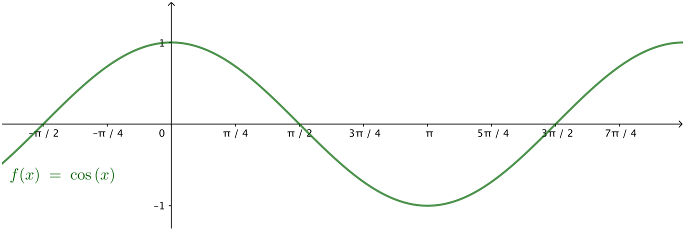


Illustration : le parcours du cosinus

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Illustration : le parcours du cosinus

- Grade 9 : triangles rectangles
  - Le cosinus est un rapport de longueurs, positif, sans unité et indépendant du triangle choisi.
  - Il y a une bijection entre les angles et les cosinus.

Illustration : le parcours du cosinus

- Grade 9 : triangles rectangles
  - Le cosinus est un rapport de longueurs, positif, sans unité et indépendant du triangle choisi.
  - Il y a une bijection entre les angles et les cosinus.
- Grade 10 : triangles quelconques - cercle trigonométrique
  - Les formules et propriétés soulignées plus tôt ne sont plus valables dans tous les cas.
  - À un cosinus peuvent correspondre deux angles différents.
  - Les élèves peuvent penser que le cosinus est une longueur et plus un rapport, ou encore qu'il dépend d'un point et plus d'un angle.

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Illustration : le parcours du cosinus

- Grade 9 : triangles rectangles
  - Le cosinus est un rapport de longueurs, positif, sans unité et indépendant du triangle choisi.
  - Il y a une bijection entre les angles et les cosinus.
- Grade 10 : triangles quelconques - cercle trigonométrique
  - Les formules et propriétés soulignées plus tôt ne sont plus valables dans tous les cas.
  - À un cosinus peuvent correspondre deux angles différents.
  - Les élèves peuvent penser que le cosinus est une longueur et plus un rapport, ou encore qu'il dépend d'un point et plus d'un angle.
- Grade 11 : fonctions trigonométriques
  - L'argument du cosinus n'est plus forcément un angle.
  - Par la périodicité de la fonction, on peut associer un cosinus à une infinité d'angles.

Illustration : le parcours du cosinus

Illustration : le parcours du cosinus

On parle toujours du même objet : le cosinus. Mais...

Illustration : le parcours du cosinus

On parle toujours du même objet : le cosinus. Mais...

- Changement de nature
  - rapport de longueurs
  - abscisse
  - ordonnée

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Illustration : le parcours du cosinus

On parle toujours du même objet : le cosinus. Mais...

- Changement de nature
  - rapport de longueurs
  - abscisse
  - ordonnée

- Changement de contexte
  - triangles rectangles
  - triangles quelconques / cercle trigonométrique
  - fonctions

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Illustration : le parcours du cosinus

On parle toujours du même objet : le cosinus. Mais...

- Changement de nature
  - rapport de longueurs
  - abscisse
  - ordonnée
- Changement de contexte
  - triangles rectangles
  - triangles quelconques / cercle trigonométrique
  - fonctions

$\Rightarrow$ Comment réunifier tout ça ?

Réflexions : le cercle trigonométrique

Réflexions : le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un outil pratique...

- visualisation des signes des rapports trigonométriques
- visualisation de la résolution d'équations trigonométriques
- visualisation des arcs (pour les radians)

Réflexions : le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un outil pratique...

- visualisation des signes des rapports trigonométriques
- visualisation de la résolution d'équations trigonométriques
- visualisation des arcs (pour les radians)

... mais c'est un artefact (Rabardel)

- intermédiaire entre les triangles et les fonctions
- étape d'un processus de généralisation
- non indispensable

Réflexions : le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un outil pratique...

- visualisation des signes des rapports trigonométriques
- visualisation de la résolution d'équations trigonométriques
- visualisation des arcs (pour les radians)

... mais c'est un artefact (Rabardel)

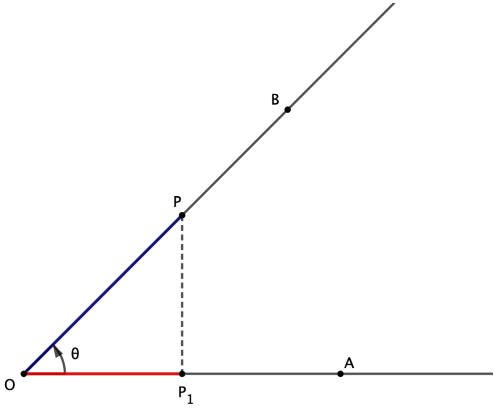
- intermédiaire entre les triangles et les fonctions
- étape d'un processus de généralisation
- non indispensable

$\Rightarrow$ Peut-on restructurer le savoir en modifiant le rôle du cercle trigonométrique ?

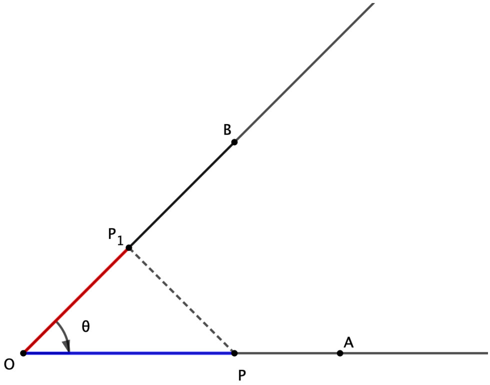
Proposition : partir des projections orthogonales

UNIVERSITÉ DE NAMUR

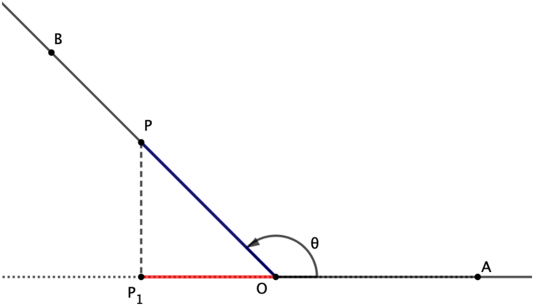
Proposition : partir des projections orthogonales

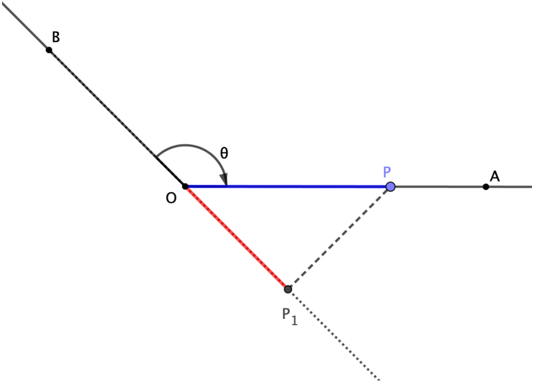


Proposition : partir des projections orthogonales



Proposition : partir des projections orthogonales




B
θ
P
A
O
P1

Proposition : partir des projections orthogonales

Avantages :

Proposition : partir des projections orthogonales

Avantages :

- On part d'une définition générale, qui réunit les grades 9 et 10 dès le départ.

Proposition : partir des projections orthogonales

Avantages :

- On part d'une définition générale, qui réunit les grades 9 et 10 dès le départ.
- Les triangles rectangles constituent des applications particulières de la définition, pour lesquelles les projections orthogonales sont déjà construites.

Proposition : partir des projections orthogonales

Avantages :

- On part d'une définition générale, qui réunit les grades 9 et 10 dès le départ.
- Les triangles rectangles constituent des applications particulières de la définition, pour lesquelles les projections orthogonales sont déjà construites.
- Le cercle, trigonométrique ou non, constitue une application particulière de la définition, pour laquelle la longueur du segment projeté est fixée.

Proposition : partir des projections orthogonales

Avantages :

- On part d'une définition générale, qui réunit les grades 9 et 10 dès le départ.
- Les triangles rectangles constituent des applications particulières de la définition, pour lesquelles les projections orthogonales sont déjà construites.
- Le cercle, trigonométrique ou non, constitue une application particulière de la définition, pour laquelle la longueur du segment projeté est fixée.
- Tous les angles sont traités de la même manière.

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Proposition : partir des projections orthogonales

Avantages :

- On part d'une définition générale, qui réunit les grades 9 et 10 dès le départ.
- Les triangles rectangles constituent des applications particulières de la définition, pour lesquelles les projections orthogonales sont déjà construites.
- Le cercle, trigonométrique ou non, constitue une application particulière de la définition, pour laquelle la longueur du segment projeté est fixée.
- Tous les angles sont traités de la même manière.
- Le savoir savant reste cohérent s'il est structuré à partir des projections orthogonales. On peut travailler sans cercle trigonométrique et construire ce dernier en fin de travail, pour automatiser les procédures.

Travail accompli

UNIVERSITÉ DE NAMUR

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Travail accompli

- Réorganisation du savoir savant
  - à partir des projections orthogonales,
  - en repoussant l'apparition du cercle trigonométrique.
- Écriture d'un savoir à enseigner cohérent
  - avec notre structure du savoir savant,
  - avec les objectifs actuels des programmes.

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Travail accompli

- Réorganisation du savoir savant
  - à partir des projections orthogonales,
  - en repoussant l'apparition du cercle trigonométrique.
- Écriture d'un savoir à enseigner cohérent
  - avec notre structure du savoir savant,
  - avec les objectifs actuels des programmes.

Travail en cours

- Analyse de ce savoir à enseigner
  - à l'aide d'un modèle praxéologique de référence, structuré par des organisations mathématiques (TAD de CHEVALLARD),
  - en se questionnant sur les obstacles que les projections orthogonales peuvent générer.

Travail accompli

- Réorganisation du savoir savant
  - à partir des projections orthogonales,
  - en repoussant l'apparition du cercle trigonométrique.
- Écriture d'un savoir à enseigner cohérent
  - avec notre structure du savoir savant,
  - avec les objectifs actuels des programmes.

Travail en cours

- Analyse de ce savoir à enseigner
  - à l'aide d'un modèle praxéologique de référence, structuré par des organisations mathématiques (TAD de CHEVALLARD),
  - en se questionnant sur les obstacles que les projections orthogonales peuvent générer.

Perspectives

- Concevoir et expérimenter de courtes activités didactiques.

UNIVERSITÉ DE NAMUR

Merci pour votre attention !

UNIVERSITÉ DE NAMUR

- Artigue, M. (1998).
  Ingénierie didactique.
  Recherches en didactique des mathématiques, 9(3) :281–308.
- Biot, C. and Bouquet, C. (1850).
  Leçons nouvelles de trigonométrie.
  Dezobry et E. Magdeleine, Libraires-Éditeurs.
- Bloch, I. (2009).
  Activité... la mesure des angles en radians au lycée.
  Petit x, 80 :47–53.
- Bosch, M. and Gascon, J. (2006).
  Twenty-five years of the didactic transposition.
  ICMI Bulletin, 58 :51–65.
- Bressoud, D. (2010).
  Historical reflections on teaching trigonometry.
  The Mathematics Teacher, 104 (2) :106–112.
- Chevallard, Y. (1991).
  La transposition didactique.
  La Pensée Sauvage.
- Cohen, G. (2015).
  Les angles sous tous les angles, volume Tangente HS-53.
  Editions POLE.
- Colesse, S. and Vassard, C. (2006).
  Les tables trigonométriques.
  Compte-rendu du colloque inter-IREM de Nantes.

UNIVERSITÉ DE NAMUR

- CREM (2004).
  Pour une culture mathématique accessible ? tous, Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes.
  M. Ballieu et M.-F. Guissard coordinateurs.
- De Kee, S., Mura, R., and Dionne, J. (1996).
  La compréhension des notions de sinus et de cosinus chez les élèves du secondaire.
  For the Learning of Mathematics, 16 (2) :19–27.
- Garnir, H. (1963).
  Fonctions de variables réelles I.
  Librairie Universitaire de Louvain - Gauthier Villars Paris.
- Gelin, E. (1902).
  Précis de trigonométrie rectiligne - A l'usage des élèves des classe d'Humanités et des candidats
  Wesmael-Charlier.
- Gür, H. (2009).
  Trigonometry learning.
  New Horizons in Education, 57 (1) :67–80.
- IREM de Poitiers (2014).
  Enseigner les mathématiques en 5^{e} à partir des grandeurs : les angles.
  T. Chevalarias *et al.*
- Kendal, M. and Stacey, K. (1996).
  Trigonometry : Comparing ratio and unit circle methods.
  Technology in mathematics education : proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).
- Khalloufi, F. and Smida, H. (2012).
  Constructing mathematical meaning of a trigonometric function through the use of an artefact.
  African Journal of Research in MST Education, A6 (2) :207–224.

Introduction

Cadre théorique

Illustration

Réflexions

Proposition

Travail accompli et perspectives

Références

- Lang, S. and Murrow, G. (1988).
  Geometry, a High School Course, volume Second Edition.
  Springer-Verlag.

- Lefort, J. (1998).
  Petite histoire de la trigonométrie.
  L'Ouvert, (91) :10–16.

- Looze, A. (2014).
  La trigonométrie : une histoire à l'envers tournée vers le ciel.
  Diapositives pour une formation CECAFOC.

- Moore, K., LaForest, K., and Hee Jung, K. (2012).
  The unit circle and unit conversions.
  Proceedings of the Fifteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, pages 1–16–1–31.

- Nijmber, C.
  Approche instrumentale et didactique : apports de Pierre Rabardel.
  http://www.adjectif.net/spip/spip.php?article202.
  consulté le 5 septembre 2014.

- Pierard, M. and Henry, V. (2014).
  La tablette tactile dans l'enseignement secondaire, un outil utile pour le cours de mathématiques ?
  Mémoire réalisé ? l'Université de Namur.

- Plane, H. (2019).
  Vers la trigonométrie.
  Au fil des maths, de la maternelle ? l'université - Bulletin de l'APMEP, 532 :86–89.

- Proulx, J. (2003).
  L'histoire de la trigonométrie comme outil de réflexion didactique.
  Bulletin de l'Association Mathématique du Québec, XLIII(3) :13–27.

UNIVERSITÉ DE NAMUR

- Rabardel, P. (1995a).
  Les hommes et les technologies - Une approche cognitive des instruments contemporains.
  Armand Colin.
- Rabardel, P. (1995b).
  Qu'est-ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation.
  Le mathématicien, le physicien et le psychologue - Outils pour le calcul et le traçage de courbes, CNDP :61–65.
- Rabardel, P. (1999).
  Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques.
  Association pour la recherche en didactique des mathématiques - Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques, pages 203–213.
- Schons, N.-J. (1968).
  Traité de trigonométrie rectiligne - 5ème édition.
  La Procure.
- Swokowski and Cole (1998).
  Algèbre et trigonométrie, avec géométrie analytique.
  DeBoeck Université.
- Tanguay, D. (2010).
  Degrés, radians, arcs et sinusoïdes.
  Petit x, 82 :59–71.
- Thompson, P. W. (2008).
  Conceptual analysis of mathematical ideas : some spadework at the foundation of mathematics education.
  Plenary paper presented at the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1 :31–49.
- Travaux et thèses de didactique (1994).
  La transposition didactique à l'épreuve.
  La Pensée Sauvage.
  coordinateurs : Arsac, G *et al.*

UNIVERSITÉ DE NAMUR

- Vadcard, L. (2002).
  Conception de l'angle chez les élèves de seconde.
  Recherches en didactique des mathématiques, 22(1) :77–117.
- Van Binst, R. (1951).
  Notes de trigonométrie rectiligne.
  Université du travail Paul Pastur - Charleroi.
- Van Sickle, J. (2011).
  A History of Trigonometry Education in the United States : 1776-1900.
  https://doi.org/10.7916/D8G166T7.
- Warin, S. and Henry, V. (2017).
  Étude du savoir à enseigner dans le domaine de la trigonométrie.
  Mémoire réalisé à l'Université de Namur.
- XVème école d'été de didactique des mathématiques (2011).
  En amont et en aval des ingénieries didactiques.
  La Pensée Sauvage.
  coordinateurs : C. Margolinas *et al.*
- Youschkevitch, A. (1976).
  Les mathématiques arabes (VIII[e]-XV[e] siècles).
  Librairies philosophiques J. VRIN.